

HG
April 09

Oversikt over tester i Econ 2130

La θ være en ukjent parameter i en statistisk modell (dvs den "sanne" verdien av θ er ukjent.. I dette kurset har de hypotesene om θ vi tester tre alternative former med θ_0 som en *kjent* verdi bestemt av den underliggende problemstillingen:

Alternativ	H_0	H_1	Type
1	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	Ensidig problem
2	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	Ensidig problem
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	Tosidig problem

La $\hat{\theta}$ være en passende estimator for θ , slik at $W = \frac{\hat{\theta} - \theta}{SE}$ er tilnærmet (eventuelt eksakt) $N(0, 1)$ -fordelt, og der SE er en eller annen estimert versjon av standardfeilen til $\hat{\theta}$. Vår testobservator, $Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$ får vi da ved å bytte ut θ med θ_0 i W . Z kan brukes som testobservator i alle de tre alternative problemene. **Merk (NB!) forskjellen mellom Z og W : W er en *ikke-observerbar* stokastisk variabel med samme (tilnærmet) *kjente* fordeling uansett hva den sanne verdien av θ er (dvs W er en såkalt *pivotal*). Z , derimot, er en *observerbar* stokastisk variabel som er (tilnærmet) $N(0, 1)$ -fordelt *bare* hvis $\theta = \theta_0$ (for i så fall, og bare da, er $Z = W$). Hvis den sanne verdien θ er forskjellig fra θ_0 , har Z en annen sannsynlighetsfordeling.**

Siden $\hat{\theta}$ er en estimator for den ukjente (sanne) verdien av θ , har vi $\hat{\theta} \approx \theta$, hvorav $Z \approx \frac{\theta - \theta_0}{SE}$ som er > 0 hvis $\theta > \theta_0$ og < 0 hvis $\theta < \theta_0$.

Derfor bør vi forkaste H_0 i problem-alternativ 1 hvis Z er tilstrekkelig stor positiv ($Z > c_1$). I alternativ 2 bør vi forkaste H_0 hvis Z er tilstrekkelig stor negativ ($Z < c_2$), og i alternativ 3 bør vi forkaste H_0 hvis Z enten er tilstrekkelig stor negativ eller tilstrekkelig stor positiv ($Z < c_3$ eller $Z > c_4$). c_1, c_2, c_3, c_4 er passende kritiske verdier. Som det beste kompromiss mellom to motstridende krav til kontroll av sannsynligheten for feil av type I og feil av type II, viser det seg at de kritiske verdiene c_1, c_2, c_3, c_4 i alle de tre alternativene enkelt kan

bestemmes som løsningen av ligningen $P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = \alpha$, der α er det valgte signifikansnivået.. Merk at sannsynligheten i ligningen utvikles i det spesielle tilfellet at $\theta = \theta_0$ der Z er (tilnærmet) $N(0, 1)$ -fordelt. For eksempel i alternativ 3 får vi $\alpha = P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = P_{\theta=\theta_0}(Z < c_3) + P_{\theta=\theta_0}(Z > c_4)$. Velger vi $\alpha/2$ for begge sannsynlighetene (som kan vises er det beste valget) får vi $c_3 = -z_{\alpha/2}$ og $c_4 = z_{\alpha/2}$..

Tabell 1 Strukturen av Z-tester (Jfr. situasjon 1 og 3 i tabell 2 og alle tre situasjoner i tabell 3)

Alternativ	H_0	H_1	Testobservator	α -nivå test: Forkast H_0 hvis	P -verdi (z_o er observert verdi av Z)
1	$\theta \leq \theta_0$	$\theta > \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z > z_{\alpha}$	$P_{\theta=\theta_0}(Z > z_o)$
2	$\theta \geq \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z < -z_{\alpha}$	$P_{\theta=\theta_0}(Z < z_o)$
3	$\theta = \theta_0$	$\theta \neq \theta_0$	$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE}$	$Z < -z_{\alpha/2}$ eller $Z > z_{\alpha/2}$	$2 \cdot P_{\theta=\theta_0}(Z > z_o)$

Mer konkret skriver vi ut nedenfor hvordan Z -testene ser ut for alternativ 1 i forskjellige modell-situasjoner i tabell 2 og 3. Alle testene er såkalte Z -tester. Eneste unntak er situasjon 2 i tabell 2 (t-test) der eneste forskjell er at $N(0, 1)$ -fordelingen er byttet ut med t_{n-1} -fordelingen.

Tabell 2 Tester for $H_0 : \mu \leq \mu_0$ mot $H_1 : \mu > \mu_0$ (alternativ 1)når (*): X_1, X_2, \dots, X_n er uavh. og identisk fordelte med $E(X_i) = \mu$ og $\text{var}(X_i) = \sigma^2$ (Jfr. regel 6.15 og 6.16. Tilsvarende for alternativ 2 og 3 med samme testobservator.)

Situasjon	Forutsetninger (modell)	n	σ	Pivotal (W)	Testobservator $Z = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{SE}$	Forkastning-kriterium	Signifikans-nivå	P -verdi (z_o, t_o er observert verdi av Z, T)
1	(*) sammen med: $X_i \sim N(\mu, \sigma), i = 1, 2, \dots, n$	Vilkårlig	Kjent	$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z > z_\alpha$	Eksakt α	$P_{\mu=\mu_0}(Z > z_o)$
2	(*) sammen med: $X_i \sim N(\mu, \sigma), i = 1, 2, \dots, n$	Vilkårlig	Ukjent	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$T > t_{n-1, \alpha}$	Eksakt α	$P_{\mu=\mu_0}(T > t_o)$
3	Bare (*) der X_i er vilkårlig fordelt	n "stor", $n \geq 30$ (til nød ≥ 20)	Ukjent	$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0, 1)$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$Z > z_\alpha$	Tilnærmet α	$P_{\mu=\mu_0}(Z > z_o)$
4	Bare (*) der X_i er vilkårlig fordelt	n liten	Ukjent	Ikke pensum				

Merknad 1. I praksis er antakelig situasjon 3 den viktigste/vanligste. Løvås er dessverre litt knapp i omtalen av denne. Han nevner den kun i en bisetning (etter "eller" i den siste setningen i regel 6.16).

Merknad 2. Styrkefunksjonen er hos Løvås bare angitt i situasjon 1. Den kan naturligvis også bestemmes i de andre situasjonene, men er litt mer kompliserte og ikke pensum.

Tabell 3 Z-tester for alternativ 1 basert på regel 5.20 (normaltilnærming for binomisk, hypergeometrisk og poisson fordeling). Signifikansnivå tilnærmet α . (Tilsvarende for alternativ 2 og 3 som i tabell 1)

<i>Modell</i>	<i>Estimator</i> $\hat{\theta}$	<i>Betingelse for normaltilnærming</i>	<i>Pivotal (W)</i>	<i>Testobservator</i> $Z = \frac{(\hat{\theta} - \theta_0)}{SE}$	<i>Forkastningskriterium</i>	<i>P-verdi</i> (z_o er observert verdi av Z)
$X \sim \text{bin}(n, p)$	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\text{var}(X) \geq 5$ $(np(1-p) \geq 5)$	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$	$Z > z_\alpha$	$P_{p=p_0}(Z > z_o)$
$X \sim \text{hypergeom.}$ (n, M, N) $(p = M/N)$	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\text{var}(X) \geq 5$	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}}$	$Z > z_\alpha$	$P_{p=p_0}(Z > z_o)$
$X \sim \text{pois}(t\lambda)$	$\hat{\lambda} = \frac{X}{t}$	$\text{var}(X) \geq 5$ $(t\lambda \geq 5)$	$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/t}} \stackrel{\text{tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$	$Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/t}}$	$Z > z_\alpha$	$P_{\lambda=\lambda_0}(Z > z_o)$

Merknad 3 Merk at vi (som i Løvås) har brukt p_0 og λ_0 i stedet for \hat{p} og $\hat{\lambda}$ i SE i nevneren på Z . Dette er for å forbedre tilnærmelsen til normalfordelingen i ligningen $P_{\theta=\theta_0}(\text{Forkast } H_0) = \alpha$ til bestemmelse av den kritiske verdien. (Derfor trenger vi ikke å estimere SE i pivotalen her.) En alternativ test (ikke nevnt i pensum) er å bruke \hat{p} og $\hat{\lambda}$ istedenfor i SE. Den test-varianten har tilnærmet de samme egenskapene som den foreslåtte og dukker ofte opp i litteraturen.